MATHEMATIQUES

(OPTION AGRONOMIE - OPTION BIOCHIMIE-BIOLOGIE) INA-ENSA 86

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 3 heures

Soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des nombres entiers naturels.

On appelle F l'ensemble des fonctions définies sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivables, positives ou nulles sur $]0,1[$, ainsi que toutes leurs dérivées.

Pour tout élément f de F, on notera :

$$f^{(0)} = f$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}$ la dérivée nième de f.

PARTIE 1

1.1 - a) α et β étant deux réels quelconques, on pose :

$$\forall x \in]0,1[\ , \ f_{\alpha\beta}(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - 1}$$

Montrer que $f_{\alpha\beta}$ est indéfiniment dérivable sur $]0,1[$ et calculer ses dérivées successives $f_{\alpha\beta}^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que $f_{\alpha\beta}$ appartienne à F.

1.2 - Soient f et g deux éléments de F, et λ et μ deux réels positifs ou nuls. Montrer que $\lambda f + \mu g$ appartient à F.

1.3 - a) Soient f et g deux fonctions indéfiniment dérivables sur $]0,1[$.
Démontrer par récurrence l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (f.g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, . \, f^{(k)} \, . \, g^{(n-k)}$$

b) En déduire que si f et g appartiennent à F, fg appartient à F.

1.4 - Soient f et g deux fonctions appartenant à F, telles que $g(]0,1[) \subset]0,1[$.
On définit la fonction $f \circ g$ par : $\forall x \in]0,1[\quad f \circ g(x) = f[g(x)]$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)^{(n)}$ est positive ou nulle sur $]0,1[$, et en déduire que $f \circ g$ appartient à F.

1.5 - Montrer que toute fonction f de F admet un prolongement par continuité sur l'intervalle $[0,1[$.

1.6 - Déduire de (1.5) que toute fonction f de F a une primitive dans F.

PARTIE 2

2.1 - Soit c un élément de $]0,1[$ et f une fonction de F.
Soit n un entier naturel. Ecrire le développement de Taylor-Lagrange de la fonction f au point c à l'ordre $n + 1$.
En déduire que si x appartient à $]c,1[$, on a l'inégalité :

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(x-c)^p}{p!} f^{(p)}(c) \leqslant f(x) \ .$$

Pour x fixé dans l'intervalle $]c,1[$, quelle est la nature de la série de terme général $\frac{(x-c)^p}{p!} f^{(p)}(c)$?

Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière de terme général $\frac{z^p}{p!} f^{(p)}(c)$?

2.2 - On considère la fonction f définie sur $]0,1[$ par :

$$\forall x \in]0,1[\ , \ f(x) = \frac{1}{1-x} \ .$$

a) Montrer que f appartient à F et tracer sommairement son graphe.

b) En faisant le changement de variable $u = 3 - 4x$, montrer que f est développable en série entière au voisinage de $x = \frac{3}{4}$ (c'est-à-dire en $u = 0$).

c) Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?

Concours Commun I.N.A. et I.N.S.A. 1986
Options Agronomie et Biochimie-Biologie. Math 2
page 230 bis